***INTRODUCTION SUR LA THEORIE DES ONDELETTES***

***&***

***PREMIERES DEFINITIONS***

La transformation en ondelettes est apparue pour la première fois dans le domaine de la géophysique vers 1980 pour l’analyse des données sismiques. Elle aura été formalisée par Morlet, Grassmann et Goupillard.

De manière analogue à la théorie des séries de Fourier, les ondelettes sont principalement utilisées pour la décomposition de fonctions. La décomposition d’une fonction en ondelettes consiste à l’écrire comme une somme pondérée de fonctions obtenues à partir d’opérations simples effectuées sur une fonction principale appelée ondelette-mère. Ces opérations consistent en des translations et dilatations de la variable. Selon que ces translations et dilatations sont choisies de manière continue ou discrète, on parlera d’une transformée en ondelettes discrète ou continue.

Le travail suivant fera l’objet du cas particulier de la transformation en ondelettes unidimensionnelle.

🟉🟉🟉🟉

**Définition 1 : Ondelette.**

Une ondelette est d’un point de vue géométrique et schématique une forme d’onde, l’idéalisation d’une note de musique, d’une durée limitée et qui a une valeur moyenne égale à .

Plus formellement, pour le cas d’une ondelette-mère (celle que l’on va pouvoir dilater et translater afin d’obtenir les autres ondelettes définissant ainsi une famille d’ondelettes), il s’agit d’une fonction de l’espace de Lebesgue (espace des fonctions à valeurs dans de carré intégrable) et telle que :

ce qui provient de la condition

où est la transformée de Fourier de .

Cette condition, dite condition d’admissibilité est nécessaire pour que la transformée en ondelettes d’une fonction existe !

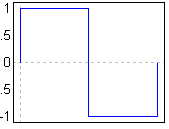
De manière plus « imagée », l’ondelette doit osciller localement autour de l’axe des abscisses.

Il existe une infinité de fonctions d’ondelettes car toute fonction oscillante localisée est une ondelette-mère possible.

Différentes familles d’ondelettes peuvent être utilisées en fonction du problème à résoudre. C’est un des nombreux avantages de la transformée en ondelettes par rapport à la transformée de Fourier (qui est liée exclusivement aux fonctions sinus et cosinus) que de pouvoir choisir l’ondelette à utiliser pour l’analyse.

***Exemples d’ondelettes mères :***

1. *Ondelette de Haar :*



Il s’agit de la fonction

On pourra remarquer que est discontinue en .

1. *Ondelette « chapeau mexicain » :*

On peut définir cette fonction par



1. *Ondelette de Morlet :*

On peut définir cette fonction par



***TRANSFORMATION EN ONDELETTES***

La transformée en ondelettes est une transformée linéaire qui décompose un signal en fréquences en conservant une certaine localisation spatiale. Concrètement, le signal de départ est projeté sur un ensemble de fonctions de bases qui varient en fréquence et en espace.

1. ***Transformation en ondelette continue.***

La transformée en ondelette continue utilise des dilatations et des translations de la fonction ondelette mère.

**Définition 2 : Produit scalaire**

Soient et deux fonctions réelles ; on définit sur le -espace vectoriel leur produit scalaire par l’intégrale suivante :

Avec la condition d’admissibilité donnée en première page, la transformée en ondelette continue de la fonction est définie à facteur constant près comme le produit scalaire de et de .

avec

Notons que permet de donner l’*échelle* (c’est le coefficient de dilatation, de fréquence) et détermine la *position* de l’ondelette sur l’axe des temps.

est le *facteur de normalisation* de l’énergie nécessaire pour que le signal transformé ait la même énergie à toutes les échelles.



*Ex :* **dilatation**.

L’ondelette verte a été dilatée à partir de l’ondelette rouge (ondelette-mère).

[on a ]



*Ex :* **translation**.

L’ondelette bleue a été translatée à partir de l’ondelette rouge (ondelette-mère).

[on a ]

1. ***Transformation en ondelettes discrète.***

La transformation en ondelettes discrète qui a été introduite par Morlet se construit à partir de « bases » de fonctions du type :

avec

peut être choisi « géométriquement » ; les paramètres de translations et sont proportionnels (c’est-à-dire ).

Une gamme d’échelles utilisée couramment est la gamme d’échelles dyadiques.

On a alors avec  :

La transformation en ondelettes discrète est presque naturellement associée à des algorithmes plus efficaces et plus rapides que des algorithmes du type FFT qui utilisent la transformée de Fourier.

Une famille d’ondelettes par exemple couramment utilisée dans la transformation en ondelettes discrète est la famille infinie des ondelettes orthogonales de Daubechies : c’est une des familles d’ondelettes les plus performantes.

***ALGORITHME DE DECOMPOSITION EN ONDELETTES DE STEPHANE MALLAT (1989)***

C’est un algorithme linéaire qui fait appel à un sous-échantillonnage. Concrètement, on procède à une décomposition par projections successives (c’est-à-dire de manière récursive) sur deux sous-espaces orthogonaux, l’un donnant l’allure générale de l’image (il s'agira de l'image en résolution moitié) et l’autre les détails.

L’algorithme de Mallat a cependant le défaut de ne pas être invariant par translation.

On peut donner une démonstration mathématique de cet algorithme ; ici, pour simplifier, on va se limiter au cas particulier de décomposition d’un signal par les ondelettes de Haar.

*Algorithme de calcul des coefficients des ondelettes de Haar dans le cas d’une transformée en ondelettes discrète :*

Considérons un signal échantillonné régulièrement sur en points notés avec

On associe à cet échantillon une fonction définie par

Quand l’échantillonnage varie, varie en décrivant l’ensemble des fonctions constantes sur chacun des intervalles et nulles sur

, ensemble des fonctions réelles à valeurs réelles, est un -espace vectoriel et on montre facilement que est un sous-espace vectoriel de

De plus, pour , on a . ce qui montre est un sous-espace vectoriel de .

⯁ A partir de la fonction de Haar , on définit la fonction  par .

*[Pour alléger l’écriture et les calculs, on peut comme ici choisir d’omettre le facteur devant .]*

⯁ Soit la fonction définie par (avec définie comme la fonction de Haar mais associant quel que soit ).

Or toute fonction de se décompose de manière unique sous la forme :

On a bien .

D’où est une base de .

Avec muni du produit scalaire défini en *définition 2*, on a :

* Si
* Si

Ainsi la base est une base orthogonale ; ce qui fait des espaces des espaces euclidiens.

**Propriété 1 : Orthogonalité dans les espaces euclidiens.**

Soient un espace euclidien de dimension , son produit scalaire et un sous-espace vectoriel de .

Alors admet un supplémentaire orthogonal dans E et ce supplémentaire est unique. On le note : .

*Dém :*

* *Existence*
* Si , on a de manière immédiate. De plus, si et .

D’où E est un supplémentaire orthogonal à .

* Si, par un raisonnement analogue, on trouve que est un supplémentaire orthogonal à .
* Si et , on considère une base orthonormale de avec .

L’ensemble est par définition orthogonal à .

Soit .

Or, le premier vecteur de la somme est dans . Donc le second entre parenthèses appartient à ssi

Avec écrit de la manière suivante, on établit ainsi que .

On a aussi immédiatement , ce qui établit et ainsi l’existence d’un supplémentaire orthogonal à.

* *Unicité :*

Soit un sous-espace vectoriel supplémentaire de dans et orthogonal à .

On a déjà puisque tous les vecteurs de sont orthogonaux à tous les vecteurs de .

De plus, car ; on en déduit et l’unicité du supplémentaire orthogonal.

Soit donc le supplémentaire orthogonal de dans .

On a . D’où de proche en proche, on arrive à :

Soit encore

- On a défini à partir de la fonction  par  ; .

On a alors .

Facilement, on montre que forme une base de .

De plus, on a :

* Si

.

* Si

.

De ce qui précède, il résulte que forme une base orthogonale de .

Alors le système est une base orthogonale de l’orthogonal de dans .

De plus, on peut déjà remarquer :

🟃 Soit un signal . Alors!

Puisque , ! .

Et on peut décomposer et comme suit :

*🟉 Déterminons les et .*

-L’orthogonalité de la base , avec et les résultats précédents sur les produits scalaires, amène à : et .

*Dém : On a par linéarité du produit scalaire*

*Et on a*

-D’autre part, on peut montrer et

*Dém : \* On a*

*Or, on sait par définition que* . *D’où :*

*\*On a de même,*

*Or, on sait par définition que* . *D’où :*

*A partir de cela, il est facile de décomposer comme suit et d’obtenir les résultats :*

On obtient finalement avec les égalités encadrées les équations d’échelles suivantes.

est la famille des coefficients d’approximation à la résolution

est la famille des coefficients d’ondelettes.

Ainsi, lorsqu’on connaît les coefficients d’ondelettes à un niveau de résolution , on peut aisément déterminer ceux du niveau et l’égalité des sous-espaces vectoriels en somme directe se comprend par :

Détails (ou pertes)

Signal à la résolution

Signal à la résolution

L’intérêt principal de cet algorithme est qu’il permet de passer d’un échantillon de taille à un nouvel échantillon principal de taille et un échantillon de taille en utilisant que des sommes ou des différences.

*Schématisation de l’algorithme de Mallat [compression d’un signal par des ondelettes] :*

**Etape**

détails

En réitérant le processus jusqu’à la dernière étape (étape ), on obtient la configuration suivante :

**Etape Etape Etape**

………………

Ce travail est en réalité la première partie de l’algorithme, appelée *analyse*.

Il s’ensuit une deuxième partie appelée *synthèse*, qui correspond à l’opération inverse de l’analyse. Dans cette partie, les coefficients d’ondelettes « omis » dans l’analyse entraînent des erreurs.

Notons toutefois que l’algorithme posé par Stéphane Mallat se fonde sur la notion d’analyse multirésolution de (qui a été d’ailleurs introduite afin de construire des bases orthogonales d’ondelettes). Il s’agit toutefois comme ici d’une suite de sous-espaces vectoriels fermés de l’espace mais vérifiant certaines propriétés plus générales.

*Représentation matricielle de l’algorithme utilisant les ondelettes de Haar :*

Une image peut être considérée comme un ensemble de pixels, chaque pixel représentant un niveau de gris si l’image est en noir et blanc, ou un niveau de rouge, de vert et de bleu si l’image est en couleur. On peut par conséquent représenter l’image par une matrice carrée de taille égale à la résolution de l’image.

Les équations d’échelle (c’est-à-dire le passage d’une résolution à la résolution inférieure) renseignent sur le type de matrice à utiliser dans l’algorithme spécifique de Haar.

est la matrice associée à l’algorithme utilisant les ondelettes de Haar.

On retrouve bien le fait que les deux premières colonnes (moitié gauche) représentent l’échantillon principal et que les deux dernières colonnes (moitié droite) de la matrice symbolisent les détails.

est la matrice associée à l’algorithme de Haar.

L’intérêt du choix de telles matrices réside dans leur adaptation pour la multiplication matricielle (en raison de l’arrangement des nombres de la matrice suivant les colonnes et le nombre de zéros).

*Exemple :*

On nomme une matrice quelconque associée à une famille de pixels. .

Alors on obtient la nouvelle matrice de pixels (représentant la résolution moitié) en effectuant le produit .

On obtient .

On obtient alors en première moitié verticale de la matrice le nouvel échantillon principal et en seconde moitié les coefficients représentants les nouveaux détails.

On réitère ensuite le processus et on obtient finalement à partir d’une matrice initiale de pixels les matrices , …, avec la relation de récurrence ( et désigne la matrice carrée spécifique à l’algorithme de Haar, choisie de telle sorte que son nombre de colonnes et de lignes soit celui des colonnes et lignes de la matrice initiale de pixels).

*En reprenant l’exemple précédent, il resterait à calculer .*

*On obtiendrait*

Mais en pratique, pour chaque matrice calculée, on ne garde que les coefficients supérieurs à une certaine précision choisie  : on effectue une *compression*. Les coefficients d’ondelettes inférieurs à cette précision sont remplacés par des .

Lors de l’étape inverse de *décompression* ou *synthèse*, pour réobtenir la matrice initiale , il suffit de calculer les nouvelles matrices par la relation de récurrence suivante :

, avec désigne la matrice inverse de et .

*En reprenant l’exemple précédent, on aurait :*

pour matrice inverse à .

Bien sûr, la matrice finale sera quelque peu différente de la matrice puisque certains coefficients sont devenus des .

***APPLICATION A LA COMPRESSION DES DONNEES***

La transformation en ondelettes se révèle très efficace pour transformer la plupart des signaux que l'on peut rencontrer, notamment les images et il est facile d'en comprendre la raison.

En effet, la majeure partie des informations à laquelle nous sommes sensibles se trouve dans les contours de l'image où l'intensité varie brutalement, et les coefficients d'ondelettes correspondants sont significatifs, y compris aux petites échelles.

Or, une image contient généralement relativement peu de contours, et est régulière (lentement variable) sauf au voisinage des contours. Par conséquent, beaucoup de coefficients d'ondelettes sont faibles (surtout aux petites échelles) ; les détails étant presque nuls, ils peuvent être négligés sans que cela entraîne de distorsion visible sur l'image.

Il suffit alors de s’imposer une précision . On ne va garder ainsi que les coefficients d’ondelettes supérieurs à . On dit alors qu’on effectue une *compression* du signal.

Il y a notamment des applications de la compression par ondelettes dans le domaine de l’imagerie médicale. Le cinéma numérique a quant à lui adopté le format JPEG 2000 qui utilise également la transformée en ondelettes.

🟉🟉🟉🟉

La théorie des ondelettes symbolise en quelque sorte l’évolution des sciences mathématiques induite par l’introduction de l’outil informatique.

Bien que l’analyse par les ondelettes soit encore loin de nous donner une réponse universelle et finale au problème de la représentation et du codage des signaux, elle se révèle être un outil mathématique particulièrement performant dans plusieurs domaines.

<http://www.cmi.univ-mrs.fr/~melot/Master2/TPsignal_PS.html>